פרק ט': היחסים הסמנטיים הבסיסיים – שינויים והערות

תיקון טעות. בנוסחה שבתרגיל 9.5 בספר יש להשמיט את $\boldsymbol{A}$ שבאגף ימין.

9.8 תרגיל. הוכח את המשפטים הבאים באינדוקציה על יצירת ϕ.

א. יהי ϕ פסוק בתחשיב הפסוקים שהפסוקים היסודיים המופיעים בו הם מבין $P_{i_1},\ldots,P_{i_k}$ עבור $i_1<\ldots<i_k\leq n$. אז קיים $\mathrm{sub}(\phi;P_1,\ldots,P_n;\psi_1,\ldots,\psi_n)=\mathrm{sub}(\phi;P_{i_1},\ldots,P_{i_k};\psi_{i_1},\ldots,\psi_{i_k})$.

ב. יהי ϕ פסוק בתחשיב הפסוקים שהפסוקים היסודיים המופיעים בו הם $P_1,\ldots,P_n$ ותהיינה $\psi_1,\ldots,\psi_n$ נוסחאות של תחשיב היחסים. אז האורך של $\mathrm{sub}(\phi;\overrightarrow{P};\overrightarrow{\psi})$ גדול או שווה לאורך של ϕ (בתנאי שאנו משתמשים באותה שיטה של כתיבת המחרוזות בתחשיבי הפסוקים והיחסים).

ג. יהי ϕ פסוק בתחשיב הפסוקים שהפסוקים היסודיים המופיעים בו הם מבין $Q_1,\ldots,Q_n$ אז בפסוק $\mathrm{sub}(\phi;\overrightarrow{Q};\overrightarrow{P})$ לא מופיעים פסוקים יסודיים מלבד $P_1,\ldots,P_n$ ואורכו הוא כאורך ϕ.

ד. יהי ϕ פסוק בתחשיב הפסוקים שהפסוקים היסודיים המופיעים בו הם מבין $P_1,\ldots,P_n$, תהיינה $\psi_1,\ldots,\psi_n$ נוסחאות של תחשיב היחסים, ויהי P_i פסוק המופיע ב-ϕ. אז כל הסימנים של ψ_i מופיעים ב- $\mathrm{sub}(\phi;\overrightarrow{P};\overrightarrow{\psi})$, ואורך $\mathrm{sub}(\phi;\overrightarrow{P};\overrightarrow{\psi})$ גדול או שווה לאורך ψ_i.

ה. יהי ϕ פסוק בתחשיב הפסוקים שהפסוקים היסודיים המופיעים בו הם מבין $Q_1,\ldots,Q_n$, ויהי $\chi=\mathrm{sub}(\phi;\overrightarrow{Q};\overrightarrow{\psi})$. יהיו $P_1,\ldots,P_n$ פסוקים יסודיים שונים זה מזה ונסמן $\rho=\mathrm{sub}(\phi;\overrightarrow{Q};\overrightarrow{P})$. אז $\chi=\mathrm{sub}(\rho;\overrightarrow{P};\overrightarrow{\psi})$.

9.8.1 משפט תהי L שפה בת מניה כריעה לתחשיב היחסים. קבוצת הטאוטולוגיות של L היא כריעה.

הוכחה. נתאר עתה אלגוריתם הבודק אם מחרוזת היא טאוטולוגיה של L. האלגוריתם שנתאר הוא מאוד לא יעיל ויתרונו הוא בכך שקל לתאר אותו וקל להוכיח שהוא נותן תמיד את התשובה הנכונה.

בהנתן מחרוזת ϕ באורך n נתבונן בכל הפסוקים של תחשיב הפסוקים שאורכם הוא לכל היותר n ושהסימנים המופיעים בהם הם מבין הסימנים $(,),\neg,\wedge,\vee,\to,P_1,\ldots,P_n$. מספר הפסוקים הללו הוא, בחישוב גס, לכל היותר $(n+7)^n$, ואפשר ליצור רשימה שלהם. לכל פסוק כזה בודקים אם הוא טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים, והדבר אפשרי כי קבוצת הטאוטולוגיות של תחשיב הפסוקים היא כריעה, ומשאירים רק את הטאוטולוגיות הללו. כעת מתבוננים בכל ה-n-יות $\psi_1,\ldots,\psi_n$ של נוסחאות שהסימנים המופיעים בהם נמצאים ב-ϕ ושאורך כל נוסחה בהן הוא לכל היותר n. מספר n-יות אלו הוא לכל היותר $(n+1)^{n^2}$ ואפשר ליצור רשימה שלהם. מציבים עתה כל אחת מן ה-n-יות $\psi_1,\ldots,\psi_n$ הללו עבור $P_1,\ldots,P_n$ בכל אחת מן הטאוטולוגיות ברשימה. אם אחת ההצבות הללו נותנת את ϕ אז ϕ היא טאוטולוגיה של L, ואם אף אחת מן ההצבות אינה נותנת את ϕ אז ϕ אינה טאוטולוגיה של L.

נוכיח עתה שאלגוריתם זה נותן את התשובה הנכונה. אם התשובה היא חיובית אז ϕ מתקבלת ע"י הצבה של נוסחאות $\psi_1,\ldots,\psi_n$ בטאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים ולכן ϕ היא טאוטולוגיה. מצד שני אם ϕ היא טאוטולוגיה של תחשיב היחסים אז היא מתקבלת ע"י הצבת נוסחאות $\psi_1,\ldots,\psi_m$ של תחשיב היחסים עבור פסוקים יסודיים $Q_1,\ldots,Q_m$ בטאוטולוגיה λ של תחשיב הפסוקים. לפי 9.8ב' אורך λ קטן או שווה לאורך ϕ שהוא n. אם האלגוריתם יפגוש את λ ו- $\psi_1,\ldots,\psi_m$ אלו הוא יתן תשובה חיובית, אבל כדי לפגוש אותם צריך שכל אחת מן הנוסחאות $\psi_1,\ldots,\psi_m$ תהיה באורך שאינו עולה על n ושתהיה מורכבת מן הסימנים המופיעים ב-ϕ. נראה עתה שאם $\psi_1,\ldots,\psi_m$ אינם כנדרש אנו יכולים לעבור לנוסחאות אחרות הממלאות אחר הדרישות. לאור 9.8א' אנו יכולים להניח שהפסוקים היסודיים $Q_1,\ldots,Q_m$ כולם מופיעים ב-λ ולכן $m\leq n$, כי אורך λ הוא לכל היותר n. לפי 9.8ד' כל אחד מהפסוקים $\psi_1,\ldots,\psi_m$ מורכב מן הסימנים המופיעים ב-ϕ ואורכו אינו עולה על n. יהי $\rho=\mathrm{sub}(\lambda;\overrightarrow{Q};\overrightarrow{P})$, אז לפי 9.8ה' $\phi=\mathrm{sub}(\rho;P_1,\ldots,P_m;\psi_1,\ldots,\psi_m)$. לפי 9.8ג' האורך של ρ הוא כאורך λ ולכן הוא אינו עולה על n. מכיוון ש-λ היא טאוטולוגיה אז, לפי 3.69 בספר, גם ρ הוא טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים. מכיוון ש- $m\leq n$ קיים גם, לפי 9.8א', $\phi=\mathrm{sub}(\rho;P_1,\ldots,P_n;\psi_1,\ldots,\psi_n)$, היכן ש- $\psi_{m+1},\ldots,\psi_n$ הן נוסחאות כלשהן באורך $\leq n$ של L המורכבות מן הסימנים שב-ϕ. לכן באלגוריתם הנ"ל מתקבלת במהלך הצבת n-יות הנוסחאות בטאוטולוגיות ההצבה של $\psi_1,\ldots,\psi_n$ אלו עבור $P_1,\ldots,P_n$ בטאוטולוגיה ρ זאת

והאלגוריתם נותן תשובה חיובית.

הצבה למשתנים אישיים חופשיים

9.15 הצבה למשתנה אישי. נתבונן בנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} \prec \mathsf{x})$. נוסחה זאת אומרת משהו על x, כאשר x הוא איבר העולם שהוא הערך של המשתנה x. אם אנו רוצים לומר אותו דבר על $z+x$ אנו כותבים $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} \prec \mathsf{z} \dot{+} \mathsf{x})$. מה שעשינו הוא שהצבנו בנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} \prec \mathsf{x})$ את $\mathsf{z} \dot{+} \mathsf{x}$ עבור x. לעומת זאת לא מתעורר אף פעם הצורך להציב באותה נוסחה עבור y כי נוסחה זאת אינה אומרת דבר על y. בהמשך נזכיר גם את ההחלפה של המשתנה המכומת y בנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} \prec \mathsf{x})$ במשתנה אחר, למשל z, הנותנת לנו את הנוסחה $\exists \mathsf{z}(\mathsf{z} \prec \mathsf{x})$. להחלפה זאת לא נקרא הצבה אלא רק החלפה כי בניגוד להצבה המשנה את משמעות הנוסחה בכך שהיא גורמת לה בדרך כלל להתייחס לעצמים אחרים החלפת משתנה מכומת אינה משנה כלל את משמעות הנוסחה. לכן כאשר אנו מדברים על הצבה בנוסחאות אנו מדברים על הצבה למשתנים החופשיים של הנוסחאות.

9.16 הגדרה. תהי $\vec{\mathsf{x}} = \langle \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \rangle$ n-ית משתנים אישיים שונים זה מזה ותהי $\vec{t} = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ n-ית שמות עצם.

א. ההצבה למשתנים אישיים בשם עצם t, $\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$ מוגדרת ברקורסיה על יצירת t כדלקמן.

(i) ל- $t = \mathsf{x}_i$, עבור $1 \le i \le n$, $\mathrm{sub}(\mathsf{x}_i; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = t_i$.

(ii) אם t הוא סימן אישי (קבוע או משתנה) השונה מ- $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ אז $\mathrm{sub}(u; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = t$.

(iii) ל- $t = \mathsf{G}(t_1, \ldots, t_k)$

$$\mathrm{sub}(\mathsf{G}(r_1, \ldots, r_k); \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = \mathsf{G}(\mathrm{sub}(r_1; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}), \ldots, \mathrm{sub}(r_k; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})).$$

ב. ההצבה למשתנים אישיים חופשיים בנוסחה ϕ, $\mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$, מוגדרת ברקורסיה על יצירת ϕ כדלקמן.

עבור נוסחה אטומית $\phi = \mathsf{R}(r_1, \ldots, r_m)$

שימו לב שזאת הגדרה מפורשת של sub לנוסחאות אטומיות. הפעולה sub מופיעה גם בצד ימין אבל זאת היא פעולת ההצבה לשמות עצם שהוגדרה כבר ב-א'.

$$\mathrm{sub}(\mathsf{R}(r_1, \ldots, r_m); \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = \mathsf{R}(\mathrm{sub}(r_1; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}), \ldots, \mathrm{sub}(r_m; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}))$$

עבור נוסחאות המתקבלות ע"י קשר דו-מקומי $\square$

$$\mathrm{sub}(\psi \square \chi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = \mathrm{sub}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) \square \mathrm{sub}(\chi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$$

עבור שלילות

$$\mathrm{sub}(\neg\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = \neg\, \mathrm{sub}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$$

ועבור נוסחאות המתקבלות ע"י כימות

$$\mathrm{sub}(\mathsf{Q}\mathsf{y}\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = \begin{cases} \mathsf{Q}\mathsf{y}\, \mathrm{sub}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) & \text{אם y אינו אחד מ- } \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n \\ & \text{אם } \mathsf{y} = \mathsf{x}_i,\ 1 \le i \le n \\ \mathsf{Q}\mathsf{y}\, \mathrm{sub}(\psi; \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_{i-1}, \mathsf{x}_{i+1}, \ldots, \mathsf{x}_n; t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n) & \end{cases}$$

במקרה התחתון של הגדרת $\mathrm{sub}(\mathsf{Q}\mathsf{y}\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$ הנוסחה בה מציבים היא $\mathsf{Q}\mathsf{x}_i\psi$ והמשתנה x_i מכומת בקידמתה ולכן איננו מציבים עבור x_i ב-ψ.

9.17 למה. יהיו $\vec{\mathsf{x}}$ ו-$\vec{t}$ כמו ב-9.16.

א. לכל שם עצם t $\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$ הוא שם עצם.

ב. לכל נוסחה ϕ $\mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$ היא נוסחה. **הוכחה.** באינדוקציה על יצירת שם העצם t והנוסחה ϕ.

9.17.1 למה. א. אם המשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ אינם מופיעים בשם העצם t אז $\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = t$.

ב. אם המשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ אינם מופיעים בנוסחה ϕ אז $\mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = \phi$. **הוכחה.** באינדוקציה על יצירת שם העצם t והנוסחה ϕ.

9.18 האם הצבה למשתנה חופשי משיגה את מטרתה? מטרת ההצבה של שם עצם t עבור משתנה x בנוסחה ϕ היא לקבל נוסחה האומרת על t את מה ש-ϕ אומרת על x. נראה עתה כי מטרה זאת אינה מושגת תמיד. נתבונן בנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{x} \prec \mathsf{y})$ האומרת שקיים משהו הגדול מ-x. כאשר מציבים בנוסחה זאת את שם העצם $\mathsf{z} \dot{+} 1$ עבור x מקבלים את הנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{z} \dot{+} 1 \prec \mathsf{y})$. נוסחה זאת אומרת על $z+1$ את מה

ש- $\exists \mathsf{y}(\mathsf{x} \prec \mathsf{y})$ אומרת על x כי היא אומרת שקיים משהו הגדול מ- $z+1$. לעומת זאת אם נציב בנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{x} \prec \mathsf{y})$ את שם העצם $\mathsf{y} \dot{+} 1$ עבור x נקבל את הנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} \dot{+} 1 \prec \mathsf{y})$. הנוסחה שקבלנו עתה אינה אומרת שקיים משהו הגדול מ- $y+1$, כפי שרצינו לקבל, אלא היא אומרת שקיים משהו הגדול מעצמו פלוס 1. מדוע ההצבה האחרונה אינה נותנת את התוצאה לה ציפינו? הסיבה נעוצה בכך שהתפקיד של המשתנה y המופיע בשם העצם $\mathsf{y} \dot{+} 1$ השתנה תוך כדי ההצבה כי כאשר y הופיע בשם העצם בנפרד מן הנוסחה הוא היה משתנה המקבל את ערכו מן ההשמה, וכאשר הוצב שם העצם בנוסחה הפך y למשתנה מכומת. מקרים אלו בהם ההצבה אינה משיגה את מטרתה מנופים ע"י ההגדרה הבאה.

9.19 הגדרה. אנו מגדירים את **הכשרות להצבה** של שם העצם t עבור המשתנה האישי x בנוסחה ϕ ברקורסיה על יצירת ϕ כדלקמן.

א. אם ϕ נוסחה אטומית אז t כשר להצבה עבור x ב-ϕ.

ב. אם $\phi = \neg\psi$ אז t כשר להצבה עבור x ב-ϕ אם הוא כשר להצבה עבור x ב-ψ.

ג. אם $\phi = \psi \square \chi$ אז t כשר להצבה עבור x ב-ϕ אם הוא כשר להצבה עבור x ב-ψ וב-χ.

ד. אם $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{x}\psi$ אז t כשר להצבה עבור x ב-ϕ.

ה. אם $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{u}\psi$, היכן ש-u הוא משתנה השונה מ-x, אז t כשר להצבה עבור x ב-ϕ אם הוא כשר להצבה עבור x ב-ψ אלא אם x הוא חופשי ב-ϕ וב-t מופיע המשתנה u.

9.19.1. יש לשים לב כי לפי הגדרה זאת אם משתנה x אינו חופשי בנוסחה ϕ אז כל שם עצם t כשר להצבה עבור x ב-ϕ. ההוכחה באינדוקציה על יצירת ϕ.

9.19.2 תרגיל. תהי ϕ נוסחה, ויהי t_i כשר להצבה עבור x_i ב-ϕ עבור $1 \le i \le n$. אז משתנה y הוא חופשי ב- $\mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$ אםם הוא חופשי ב-ϕ ואינו אחד המשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ או אם עבור $1 \le i \le n$ כלשהו x_i חופשי ב-ϕ ו-y מופיע ב-t_i.

נסח והוכח את הטענה המקבילה ביחס לשמות העצם, ואז הוכח את האמור כאן באינדוקציה על יצירת ϕ.

9.22 המשפט הסמנטי על ההצבה למשתנים חופשיים. יהי $\boldsymbol{A}$ מבנה, s השמה ל-A, $\overrightarrow{\mathsf{x}}$ n-יית משתנים אישיים שונים זה מזה ו-$\overrightarrow{t}$ n-יית שמות עצם.

נסמן ב-s' את $s\begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & ,\ldots, & \mathsf{x}_n \\ \boldsymbol{A}(t_1)[s] & ,\ldots, & \boldsymbol{A}(t_n)[s] \end{pmatrix}$.

א. לכל שם עצם t $\quad \boldsymbol{A}(\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}))[s] = \boldsymbol{A}(t)[s']$

ב. אם לכל $1 \le i \le n$ t_i כשר להצבה עבור x_i בנוסחה ϕ אז

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}))[s] = \boldsymbol{A}(\phi)[s']$$

הסבר. הרעיון הבסיסי של משפט זה הוא הרעיון העומד ביסוד משמעות ההצבה לביטויים אלגבריים כפי שהוסבר ב-3.67, ועל כן משפט זה דומה מאד למשפטים 3.67 ו-9.5 אשר גם הם מבוססים על אותו רעיון. רעיון זה, החוזר בכל מקום בו מדובר בהצבה, הוא שכאשר אנו רוצים לקבל את הערך של ביטוי המתקבל ע"י הצבה במבנה ובהשמה נתונים אנו מחשבים תחילה את הערכים באותו מבנה ובאותה השמה של הביטויים אותם אנו מציבים ואז אנו מחשבים את הערך של הביטוי בו אנו מציבים, לפני ביצוע ההצבה, במבנה או בהשמה אשר תוקנו ע"י שהכנסנו בהם במקומות המתאימים את הערכים של הביטויים שאותם אנו מציבים.

הוכחה. א. באינדוקציה על יצירת t.

אם $t = \mathsf{x}_i$ עבור $1 \le i \le n$ כלשהו אז $\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = t_i$ ולכן קיים, לפי הגדרת s',

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}))[s] = \boldsymbol{A}(t_i)[s] = s'(\mathsf{x}_i) = \boldsymbol{A}(t)[s']$$

אם t הוא משתנה אישי y השונה מ- $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ אז $s'(\mathsf{y}) = s(\mathsf{y})$ ולכן

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}))[s] = \boldsymbol{A}(\mathsf{y})[s] = s(\mathsf{y}) = s'(\mathsf{y}) = \boldsymbol{A}(t)[s']$$

אם t הוא קבוע אישי c אז $\quad \boldsymbol{A}(\mathrm{sub}(t; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}))[s] = \boldsymbol{A}(\mathsf{c})[s] = \mathsf{c}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}(\mathsf{c})[s'] = \boldsymbol{A}(t)[s']$

אם $t = \mathsf{G}(r_1, \ldots, r_m)$, כאשר G סימן פעולה m-מקומי ו- $r_1, \ldots, r_m$ שמות עצם אז, לפי הנחת האינדוקציה, קיים

$$\text{לכל } 1 \le i \le n \quad \boldsymbol{A}(\mathrm{sub}(r_i; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}))[s] = \boldsymbol{A}(r_i)[s'] \tag{1}$$

כמו כן קיים, לפי הגדרת ההצבה, $\mathrm{sub}(t;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}) = \mathsf{G}(\mathrm{sub}(r_1;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}),\ldots,\mathrm{sub}(r_m;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))$

ולכן $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(t;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{G}(\mathrm{sub}(r_1;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}),\ldots,\mathrm{sub}(r_m;\vec{\mathsf{x}};\vec{t})))[s]$

ולפי הגדרת הערך של שם עצם $= \mathsf{G}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(r_1;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s],\ldots,\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(r_m;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s])$

ולפי הנחת האינדוקציה (1) $= \mathsf{G}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(r_1)[s'],\ldots,\boldsymbol{\mathcal{A}}(r_m)[s'])$

ולפי הגדרת הערך $= \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{G}(r_1,\ldots,r_m))[s'] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)[s']$

ב. אם ϕ הוא נוסחה אטומית אז $\phi = \mathsf{R}(r_1,\ldots,r_m)$, כאשר R קבוע יחס m-מקומי ו- $r_1,\ldots,r_m$ שמות עצם אז, לפי חלק א', קיים (1). ההוכחה במקרה זה דומה לגמרי להוכחה בחלק א' של המקרה בו $t = \mathsf{G}(r_1,\ldots,r_m)$.

אם $\phi = \phi_1\Box\phi_2$ אז, לפי הגדרת הכשרות להצבה, t_i כשר להצבה עבור x_i ב-ϕ_1 וב-ϕ_2, לכל $1 \le i \le n$, ולכן, לפי הנחת האינדוקציה לגבי הנוסחאות ϕ_1 ו-ϕ_2, קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\phi_j;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi_j)[s']$ עבור $j = 1,2$. קיים לכן

$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\phi_1\Box\phi_2;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\phi_1;\vec{\mathsf{x}};\vec{t})\Box\mathrm{sub}(\phi_2;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s]$

$= t_\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\phi_1;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s],\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\phi_2;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s]) = t_\Box(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi_1)[s'],\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi_2)[s'])$

$= \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi_1\Box\phi_2)[s']$

אם $\phi = \neg\psi$ אז הוכחת ב' דומה להוכחה במקרה $\phi = \phi_1\Box\phi_2$.

כעת נעסוק במקרה בו $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{y}\psi$, כאשר Q הוא הכמת הישי או הכולל. שני המקרים הללו מקבילים לגמרי ולכן די לנו לטפל במקרה בו Q הוא הכמת הישי $\exists$. כדי לקבל מן ההוכחה עבור המקרה בו Q הוא $\exists$ את ההוכחה עבור המקרה בו Q הוא $\forall$ כל מה שצריך לעשות הוא להחליף בכל מקום את $\max$ ב- $\min$. כעת עלינו להבחין בין המקרה בו y הוא אחד המשתנים $\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n$ עבורם אנו מציבים לבין המקרה בו y אינו אחד ממשתנים אלו. תחילה נטפל במקרה בו y אינו אחד המשתנים $\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n$. במקרה זה קיים:

לפי הגדרת ההצבה $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\exists\mathsf{y}\psi;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\exists\mathsf{y}\,\mathrm{sub}(\psi;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s]$

ולפי הגדרת האמת $= \max_{a\in A}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\psi;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right]$

מכיוון ש-t_i כשר להצבה עבור x_i ב-ϕ לכן, לפי הגדרת הכשרות להצבה, הוא כשר להצבה עבור x_i ב-ψ, לכל $1 \le i \le n$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה ש-ב' קיים ביחס לנוסחה ψ, אנו מקבלים, כאשר אנו מחליפים את s, ב- $s\binom{\mathsf{u}}{a}$,

$$= \max_{a\in A}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\psi)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & ,\ldots, & \mathsf{x}_n \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_1)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right] & ,\ldots, & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_n)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right]\end{pmatrix}\right] \qquad (2)$$

נדגיש כי ב-(2) מופיעה בכל מקום ההשמה $s\binom{\mathsf{y}}{a}$ ולא s כי (2) מתקבלת מהנחת האינדוקציה כאשר ההשמה בה מדובר היא $s\binom{\mathsf{y}}{a}$ ולא s.

נתבונן עתה ב-x_i-ים המופיעים ב-(2), $1 \le i \le n$. תחילה נעסוק ב-x_i שהוא חופשי ב-ψ. אילו המשתנה y היה מופיע ב-t אז t לא היה כשר להצבה עבור x_i ב-ϕ, לכן y אינו מופיע ב-t_i. לכן קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$ וניתן להחליף ב- (2) את $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right]$ ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$. עתה נעסוק ב-$\mathsf{x}_i$ שאינו חופשי ב-ψ. במקרה זה הערך של (2) אינו תלוי כלל ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_j)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right]$ ולכן ניתן להחליף ב-(2) את $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right]$ באיבר כלשהו של A ובמיוחד גם ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$. כך ראינו כי לכל $1 \le i \le n$ ניתן להחליף ב-(2) את $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\right]$ ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$ ולכן (2) שווה ל-

$= \max_{a\in A}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\psi)\left[s\binom{\mathsf{y}}{a}\begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & ,\ldots, & \mathsf{x}_n \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_1)[s] & ,\ldots, & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_n)[s]\end{pmatrix}\right]$

ולפי הגדרת s' והגדרת האמת $= \max_{a\in A}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\psi)\left[s'\binom{\mathsf{y}}{a}\right] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\exists\mathsf{y}\psi)[s'] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)[s']$

כעת נטפל במקרה בו y ב-$\phi = \exists\mathsf{y}\psi$, הוא אחד המשתנים $\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_n$, כלומר כאשר $\phi = \exists\mathsf{x}_j\psi$ עבור $1 \le j \le n$ מסויים. ההוכחה עבור מקרה זה דומה מאוד להוכחה עבור המקרה בו טפלנו זה עתה רק שהמשתנה x_j ממלא בהוכחה תפקיד שונה מזה של המשתנים האחרים. במקרה זה קיים, לפי הגדרת ההצבה והגדרת האמת

אם $\phi = \exists\mathsf{x}_j\psi$ אז $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\exists\mathsf{x}_j\psi;\vec{\mathsf{x}};\vec{t}))[s]$

$= \boldsymbol{\mathcal{A}}(\exists\mathsf{x}_j\,\mathrm{sub}(\psi;\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_{j-1},\mathsf{x}_{j+1},\ldots,\mathsf{x}_n;t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n))[s]$

(3) $= \max_{a\in A}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\psi;\mathsf{x}_1,\ldots,\mathsf{x}_{j-1},\mathsf{x}_{j+1},\ldots,\mathsf{x}_n;t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n))\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right]$

לפי הגדרת הכשרות להצבה t_i כשר להצבה עבור x_i ב-ψ כאשר $1 \le i \le n$, $j \neq i$. לכן לפי הנחת האינדוקציה ש-ב' קיים ביחס לנוסחה ψ, כאשר אנו מחליפים את s, $\vec{\mathsf{x}}$ ו-$\vec{t}$ ב- $s\binom{\mathsf{x}_j}{a}$, $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_{j-1}, \mathsf{x}_{j+1}, \ldots, \mathsf{x}_n$ ו- $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n$,

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathrm{sub}(\psi; \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_{j-1}, \mathsf{x}_{j+1}, \ldots, \mathsf{x}_n; t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n)) \left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right] =$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\psi)\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & ,\ldots, & \mathsf{x}_{j-1} & , & \mathsf{x}_{j+1} & ,\ldots, & \mathsf{x}_n \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_1)[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}] & ,\ldots, & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_{j-1})[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}] & , & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_{j+1})[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}] & ,\ldots, & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_n)[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}] \end{pmatrix}\right]$$

נסמן את הביטוי השני מבין שני אלו ב-(4). נחזור ונדגיש כי ב-(4) מופיעה בכל מקום ההשמה $s\binom{x_i}{a}$ ולא s כי (4) מתקבלת מהנחת האינדוקציה כאשר ההשמה בה מדובר היא $s\binom{x_i}{a}$ ולא s.

נתבונן עתה ב-x_i-ים המופיעים ב-(4), $1 \le i \le n$, $i \neq j$. תחילה נעסוק ב-x_i שהוא חופשי ב-ψ. מכיוון ש-t_i כשר להצבה עבור x_i ב-ϕ לכן x_j אינו מופיע ב-t_i. לכן קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$ וניתן להחליף ב-(3) את $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right]$ ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$. עתה נעסוק ב-$\mathsf{x}_i$ שאינו חופשי ב-ψ. במקרה זה הערך של (4) אינו תלוי כלל ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right]$ ולכן ניתן להחליף ב-(3) את $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right]$ באיבר כלשהו של A ובמיוחד גם ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$. כך ראינו כי לכל $1 \le i \le n$, $i \neq j$, ניתן להחליף ב-(3) את $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right]$ ב- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t_i)[s]$ ולכן (3) שווה ל-

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\psi)\left[s\binom{\mathsf{x}_j}{a}\begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & ,\ldots, & \mathsf{x}_{j-1} & , & \mathsf{x}_{j+1} & ,\ldots, & \mathsf{x}_n \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_1)[s] & ,\ldots, & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_{j-1})[s] & , & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_{j+1})[s] & ,\ldots, & \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_n)[s] \end{pmatrix}\right] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\psi)\left[s'\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right]$$

כאשר נצרף את השוויון ב-(4) ואת מה שראינו עתה נקבל ש-(3) שווה ל-

$\max_{a \in A} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\psi)\left[s'\binom{\mathsf{x}_j}{a}\right] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\exists \mathsf{x}_j \psi)[s']$

9.24.1 מסקנה. אם כל ההצבות לקמן כשרות אז:

א. אם ϕ נוסחה אמיתית לוגית אז גם $\mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$ כן.

ב. אם $\psi \models \phi$ אז גם $\mathrm{sub}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) \models \mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$.

ג. אם $\psi \equiv \phi$ אז גם $\mathrm{sub}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) \equiv \mathrm{sub}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$.

האם התנאי שההצבות כשרות היא חיונית למסקנות אלו?

9.25.1 תרגיל. אם y אינו חופשי ב- $\phi(\mathsf{x})$ והוא כשר להצבה עבור x ב-$\phi(\mathsf{x})$ אז $\mathsf{Q}\mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \equiv \mathsf{Q}\mathsf{y}\phi(\mathsf{y})$.

ב. הראה שכל אחת משתי הדרישות ב-א' ש-y אינו חופשי ב-$\phi(\mathsf{x})$ וש-y כשר להצבה עבור x ב- $\phi(\mathsf{x})$ היא חיונית.

החלפת משתנים מכומתים

לעתים מתעורר הצורך להחליף את המשתנים המכומתים בנוסחה במשתנים אחרים. אם עושים זאת בזהירות סבירה אז משמעות הנוסחה אינה משתנה בהחלפה זאת. למשל לנוסחה $\exists \mathsf{z}(\mathsf{z} \succ \mathsf{x})$, המתקבלת מן הנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} \succ \mathsf{x})$ ע"י החלפת המשתנה המכומת y במשתנה z, ישנה אותה המשמעות כמו לנוסחה $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} \succ \mathsf{x})$. בעברית ניתן לומר זאת ללא משתנה — קיים משהו הגדול מ-x. תופעה זאת מוכרת לנו גם משיטות הכתיבה של האינטגרלים. אם בביטוי $\int_0^x y^2 dy$ נחליף את המשתנה y במשתנה z נקבל את הביטוי $\int_0^x z^2 dz$ שערכו שווה לערך של $\int_0^x y^2 dy$. ניתן עתה הגדרה פורמלית להחלפת המשתנים המכומתים. נשים לב שכאשר החלפנו את המשתנים החופשיים דברנו על הצבה כי שם הצבנו עבור משתנה חופשי שם עצם היכול לקבל ערך השונה מערכו של המשתנה ואילו כאן אנו מדברים רק על החלפת סימנים כי כאן איננו משנים את המשמעות.

9.29 הגדרה. יהיו $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ משתנים שונים זה מזה. נסמן ב- $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}})$ את תוצאת ההחלפה של ההופעות המכומתות של המשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ בנוסחה ϕ במשתנים $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n$, המוגדרת ברקורסיה על יצירת ϕ כדלקמן.

א. אם ϕ נוסחה אטומית אז $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t}) = \phi$

ב. אם $\phi = \neg\psi$ אז $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) = \neg\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}})$

ג. אם $\phi = \psi\Box\chi$ אז $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) = \mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) \Box \mathrm{rep}(\chi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}})$

ד. אם $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{y}\psi$ כאשר y אינו אחד המשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ אז $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) = \mathsf{Q}\mathsf{y}\,\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$

ה. אם $\phi = \mathsf{Q}\mathsf{x}_i\psi$ אז $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) = \mathsf{Q}\mathsf{y}_i\,\mathrm{sub}(\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}); \mathsf{x}_i; \mathsf{y}_i)$

9.30 למה. אם $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n$ הם משתנים שאינם מופיעים בנוסחה ϕ אז, עבור $1 \le i \le n$, y_i כשר להצבה עבור x_i בנוסחה $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}})$.

הוכחה. באינדוקציה על יצירת ϕ, תוך שימוש ב-9.19.2.

9.31 המשפט הסמנטי על החלפת משתנים מכומתים. אם $\mathsf{y}_1, \ldots, \mathsf{y}_n$ הם משתנים שאינם מופיעים בנו-סחה ϕ אז $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) \equiv \phi$, כלומר, החלפת משתנים מכומתים בנוסחה במשתנים "חדשים" אינה משנה את משמעות הנוסחה.

הוכחה. באינדוקציה על יצירת ϕ. אם ϕ היא נוסחה אטומית אז $\mathrm{rep}(\phi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) = \phi$. אם ϕ היא $\neg\psi$ או $\psi\Box\chi$ או $\mathsf{Q}\mathsf{z}\psi$, כאשר z אינו אחד המשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$, אז הדבר נובע מיידית מהנחת האינדוקציה.

אם ϕ היא $\exists\mathsf{x}_i\psi$, עבור $1 \le i \le n$ כלשהו אז למבנה $\boldsymbol{A}$ והשמה s ל-A,

לפי הגדרת rep $\boldsymbol{A}(\mathrm{rep}(\exists\mathsf{x}_i\psi))[s] = \boldsymbol{A}(\exists\mathsf{y}_i\,\mathrm{sub}(\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}); \mathsf{x}_i; \mathsf{y}_i))$

ולפי הגדרת האמת $= \max_{a\in A} \boldsymbol{A}(\mathrm{sub}(\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}); x_i; y_i)) \left[s\binom{\mathsf{y}_i}{a}\right]$

ולפי משפט ההצבה ו-9.30 $= \max_{a\in A} \boldsymbol{A}(\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}})) \left[s\binom{\mathsf{y}_i}{a}\binom{\mathsf{x}_i}{s\binom{\mathsf{y}_i}{a}(\mathsf{y}_i)}\right]$

ומכיוון ש- $s\binom{\mathsf{y}_i}{a}(\mathsf{y}_i) = a$ $= \max_{a\in A} \boldsymbol{A}(\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}})) \left[s\begin{pmatrix}\mathsf{y}_i\ ,\ \mathsf{x}_i\\ a\ ,\ a\end{pmatrix}\right]$

ולפי הנחת האינדוקציה ש- $\mathrm{rep}(\psi; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{\mathsf{y}}) \equiv \psi$ $= \max_{a\in A} \boldsymbol{A}(\psi) \left[s\begin{pmatrix}\mathsf{y}_i\ ,\ \mathsf{x}_i\\ a\ ,\ a\end{pmatrix}\right]$

ומכיוון ש-y אינו מופיע ב-ψ אז, לפי 8.31, $= \max_{a\in A} \boldsymbol{A}(\psi) \left[s\binom{\mathsf{x}_i}{a}\right]$

ולפי הגדרת האמת $= \boldsymbol{A}(\exists\mathsf{x}_i\psi)$

אם ϕ היא $\forall\mathsf{x}_i\psi$ הטיפול זהה לטיפול במקרה בו ϕ היא $\exists\mathsf{x}_i\psi$, בהחלפת max ב-min.

9.32 הגדרה. נוסחה בה כל הכמתים מופיעים בהתחלה, כלומר נוסחה מהצורה $\mathsf{Q}_1\mathsf{x}_1\mathsf{Q}_2\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{Q}_n\mathsf{x}_n\psi$ כאשר $n \ge 0$, כל Q_i, עבור $1 \le i \le n$ הוא כמת ו-ψ היא נוסחה חסרת כמתים, נקראת **נוסחה בצורת קידומת נורמלית** (prenex normal form). נאמר ש- $\mathsf{Q}_1\mathsf{x}_1\mathsf{Q}_2\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{Q}_n\mathsf{x}_n\psi$ היא בצורת קידומת נורמלית **מדוייקת** אם כל המשתנים $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ שונים זה מזה.

9.32.1 למה. אם Q הוא $\exists$ אז נסמן ב-Q^* את $\forall$ ואם Q הוא $\forall$ אז נסמן ב-Q^* את $\exists$.

אם $\phi = \mathsf{Q}_1\mathsf{x}_1\mathsf{Q}_2\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{Q}_n\mathsf{x}_n\psi$ אז $\neg\phi \equiv \mathsf{Q}_1^*\mathsf{x}_1\mathsf{Q}_2^*\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{Q}_n^*\mathsf{x}_n\neg\psi$.

הוכחה. באינדוקציה על n, תוך שימוש ב-9.14.

9.32.2 למה. א. אם ϕ נוסחה חסרת כמתים אז גם $\mathrm{sub}(\phi; ; \overrightarrow{\mathsf{x}}; \overrightarrow{t})$ חסרת כמתים.

ב. אם $\mathsf{y} \ne \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ אז $\mathrm{sub}(\mathsf{Q}_1\mathsf{x}_1\ldots\mathsf{Q}_n\mathsf{x}_n\phi\,; \mathsf{y}; \mathsf{z}) = \mathsf{Q}_1\mathsf{x}_1\ldots\mathsf{Q}_n\mathrm{sub}(\phi; \mathsf{y}; \mathsf{z})$.

הוכחת ב' באינדוקציה על n.

9.32.3 למה. אם ϕ_1 ו-ϕ_2 הם בצורת קידומת נורמלית אז $\phi_1\Box f_2$ שקולה לוגית לנוסחה בצורת קידומת נורמלית.

הוכחה. באינדוקציה על מספר הכמתים ב-ϕ_1 ו-ϕ_2 שנסמנו ב-k. אם $k = 0$ ϕ_1 ו-ϕ_2 הן חסרות כמתים ואז גם $\phi_1\Box\phi_2$ היא חסרת כמתים, ולכן היא בצורת קידומת נורמלית. אם $k > 0$ אז לפחות אחת הנוסחאות ϕ_1 ו-ϕ_2, נאמר ϕ_1, היא בעלת הצורה $\mathsf{Q}\mathsf{x}\psi$, היכן שגם ψ היא בצורת קידומת נורמלית, עם כמת אחד פחות מאשר ב-ϕ_1. אם x אינו חופשי בנוסחה השניה ϕ_2 אז, לפי נוסחאות השקילות הלוגית ב-9.14 בספר, $\phi_1\Box\phi_2$ שקולה לוגית לנוסחה מהסוג $\mathsf{Q}'\mathsf{x}(\psi\circ\phi_2)$, היכן ש-$\mathsf{Q}'$ הוא כמת ו-$\circ$ הוא קשר דו מקומי. בנוסחאות ψ ו-ϕ_2 מספר הכמתים הוא $k-1$. לכן לפי הנחת האינדוקציה הנוסחה $\psi\circ\phi_2$ שקולה לוגית לנוסחה χ בצורת קידומת נורמלית, ולכן הנוסחה $\phi_1\Box f_2$ השקולה לוגית ל- $\mathsf{Q}'\mathsf{x}(\psi\circ\phi_2)$ שקולה לוגית לנוסחה $\mathsf{Q}'\mathsf{x}\chi$ שהיא בצורת קידומת נורמלית.

כך הוכחנו את הלמה בהנחה ש-x אינו חופשי ב-ϕ_2. אם x חופשי ב-ϕ_2 נעבור מ-ϕ_1 לנוסחה ρ בצורת

קידומת נורמלית השקולה לוגית ל-ϕ_1, המתחילה בכמת על משתנה שאינו חופשי ב-ϕ_2, ושמספר הכמתים בה שווה למספר הכמתים ב-ϕ_1. $\phi_1\Box\phi_2$ שקולה לוגית ל- $\rho\Box\phi_2$, ומכיוון שהכמת הראשון ב-ρ אינו על משתנה החופשי ב-ϕ_2 $\rho\Box\phi_2$ שקולה לוגית לנוסחה בצורת קידומת נורמלית, ובכך הוכח צעד האינדוקציה. כדי לקבל את ρ נצא מ-ϕ_1 שהוא $\mathsf{Qx}\psi(\mathsf{x})$. לפי 9.25.1 נוסחה זאת שקולה לוגית לנוסחה $\mathsf{Qy}\psi(\mathsf{y})$, היכן ש-y הוא משתנה כלשהו שאינו מופיע ב-ϕ_2. לאור 9.32.2 נוסחה זאת היא נוסחה בצורת קידומת נורמלית שמספר כמתיה שווה למספר הכמתים ב-ϕ_1, ולכן היא כנדרש.

9.32 תרגיל. כל נוסחה ϕ שקולה לוגית לנוסחה בצורת קידומת נורמלית.

רמז. הוכח זאת באינדוקציה על יצירת ϕ, תוך שימוש ב-9.32.1 וב-9.32.3.

איזומורפיזם

מהם המספרים הטבעיים? לפי הגדרת צרמלו המספרים הטבעיים הם הקבוצות $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\},\dots$ כאשר פעולת העוקב d נתונה ע"י $d(n) = \{n\}$, כלומר העוקב של המספר n הוא הקבוצה המכילה את n לבדו. לפי הגדרת פון-נוימן המספרים הטבעיים הם הקבוצות $\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\dots$ כאשר פעולת העוקב d נתונה ע"י $d(n) = n\cup\{n\}$, כלומר כל מספר הוא קבוצת כל המספרים הקטנים ממנו והעוקב של המספר n הוא קבוצת כל איברי n בתוספת n עצמו. לפי הגדרת פרגה המספרים הטבעיים הם $\{\emptyset\},\ \{\{x\}|x\in U\},\ \{\{x,y\}\}|x\neq y,\ x,y\in U\},\dots$ כאשר U היא קבוצת כל העצמים ופעולת העוקב היא $d(n)=\{z\cup\{x\}|z\in n\wedge x\notin z\}$. אפשר לתת הגדרה גיאומטרית של המספרים הטבעיים ע"י שקובעים ישר מסויים במישור או במרחב, בוחרים עליו נקודות O,E שונות ויוצרים ממנו ציר מספרים בו O היא 0, E היא 1 וכן הלאה, ופעולת העוקב נתונה ע"י $d(O)=E$, ועבור $n\neq O$ $d(n)$ היא הנקודה P על הישר OE כך ש-n נמצאת בין O ל-P והקטע nP חופף לקטע OE.

ראינו כאן ארבע מבנים שונים המתמודדים על השם "מבנה המספרים הטבעיים" ויש עוד רבים אחרים. האם קיימות אסכולות מתימטיות שונות הדוגלות במספרים טבעיים שונים עם משפטים מתימטיים שונים הנוגעים להם? התשובה לשאלה זאת היא שלילית. המבנים השונים למספרים הטבעיים שהבאנו כאן באים לשרת מטרות שלא נדון בהן כאן אולם המתימטיקה רואה בהם רק עותקים שונים של אותו מבנה של מספרים טבעיים. הסיבה לכך היא שבניגוד לפילוסופיה המתעניינת גם בשאלת המהות של המספרים הטבעיים, המתימטיקה רואה כחשוב לא את מהות המספרים אלא את הקשרים ביניהם, וקשרים אלו הם שווים בכל ארבע הדוגמאות שראינו.

אנו מדברים על איזומורפיזם בין שני מבנים כאשר האחד הוא תמונה מדוייקת של חברו. מה שמעביר "נקודה" במבנה אחד לתמונתו במבנה השני זה לא קרן אור אלא פונקציה, והיות ואנו רוצים בתמונה מדוייקת אנו זקוקים לפונקציה חד חד ערכית.

9.37 הגדרת האיזומורפיזם. יהיו $\mathfrak{A}$ ו-$\mathfrak{B}$ מבנים לשפה L. H נקראת **איזומורפיזם** מ-$\mathfrak{A}$ ל-$\mathfrak{B}$ אם H היא פונקציה חד חד ערכית מ-A על B המקיימת את התנאים הבאים.

א. לכל $n\geq 1$, לכל קבוע יחס n-מקומי R ב-L, ולכל $a_1,\dots,a_n\in A$ $\quad \mathsf{R}^{\mathfrak{B}}(H(a_1),\dots,H(a_n)) = \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)$

ב. לכל קבוע אישי c של L $\quad H(\mathsf{c}^{\mathfrak{A}})=\mathsf{c}^{\mathfrak{B}}$

ג. לכל $n\geq 1$, לכל קבוע פעולה n-מקומי G ב-L, ולכל $a_1,\dots,a_n\in A$ $\quad \mathsf{G}^{\mathfrak{B}}(H(a_1),\dots,H(a_n)) = H(\mathsf{G}^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n))$

אם קיים איזומורפיזם מ-$\mathfrak{A}$ ל-$\mathfrak{B}$ אז אנו אומרים שהמבנים $\mathfrak{A}$ ו-$\mathfrak{B}$ הדאיזומורפיים וכותבים $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

9.38למה. יחס האיזומורפיזם בין מבנים הוא יחס שקילות כמפורט לקמן.

א. למבנה $\mathfrak{A}$, העתקת הזהות על A היא איזומורפיזם של $\mathfrak{A}$ על עצמו, ולכן יחס האיזומורפיזם הוא רפלקסיבי.

ב. אם H הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{A}$ ל-$\mathfrak{B}$ אז H^{-1} הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{B}$ ל-$\mathfrak{A}$, ולכן יחס האיזומורפיזם הוא סימטרי.

ג. אם H הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{A}$ ל-$\mathfrak{B}$ ו-J הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{B}$ ל-$\mathfrak{C}$ אז JH הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{A}$

ל-$\mathfrak{C}$, ולכן יחס האיזומורפיזם הוא טרנזיטיבי.

הוכחה. ב. היות ו-H היא העתקה חד חד ערכית של A על B H^{-1} מוגדרת והיא העתקה חד חד ערכית של B על A.

בשיוויון של 9.37א' נציב $H^{-1}(a_1),\ldots,H^{-1}(a_n)$ עבור $a_1,\ldots,a_n$ ונקבל

$\mathsf{R}^{\mathfrak{B}}(H(H^{-1}(a_1)),\ldots,H(H^{-1}(a_n))=\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}(H^{-1}(a_1),\ldots,H^{-1}(a_n))$

כלומר $\mathsf{R}^{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n)=\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}(H^{-1}(a_1),\ldots,H^{-1}(a_n))$

וזהו תנאי א' לכך ש-H^{-1} הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{B}$ ל-$\mathfrak{A}$.

הפעלת H^{-1} על השיוויון של 9.37ב' נותנת $H^{-1}(\mathsf{c}^{\mathfrak{B}})=H^{-1}(H(\mathsf{c}^{\mathfrak{A}}))=\mathsf{c}^{\mathfrak{A}}$ וזהו תנאי ב' לכך ש-H^{-1} הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{B}$ ל-$\mathfrak{A}$.

בשיוויון של 9.37ג' נציב $H^{-1}(a_1),\ldots,H^{-1}(a_n)$ עבור $a_1,\ldots,a_n$ ונקבל

$\mathsf{G}^{\mathfrak{B}}(H(H^{-1}(a_1)),\ldots,H(H^{-1}(a_n))=H(\mathsf{G}^{\mathfrak{A}}(H^{-1}(a_1),\ldots,H^{-1}(a_n))$

כלומר $\mathsf{G}^{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n)=H(\mathsf{G}^{\mathfrak{A}}(H^{-1}(a_1),\ldots,H^{-1}(a_n)))$

והפעלת H^{-1} על שני האגפים של שיוויון זה נותנת

$H^{-1}(\mathsf{G}^{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n))=\mathsf{G}^{\mathfrak{A}}(H^{-1}(a_1),\ldots,H^{-1}(a_n))$

וזהו תנאי ג' לכך ש-H^{-1} הוא איזומורפיזם מ-$\mathfrak{B}$ ל-$\mathfrak{A}$.

מושג האיזומורפיזם עצמו הוא מושג מתימטי ואינו מושג של הלוגיקה כי הוא עוסק בקבוצות, ביחסים ופעולות על הקבוצות ובמבנים, אבל לא בשפה, ואילו הלוגיקה עוסקת בשפה. (אמנם בחרנו להגדיר את מושג המבנה כך שהמבנה כולל בתוכו את השפה, אבל זה היה צעד טכני ולא מהותי.) מה שמקשר את מושג האיזומורפיזם עם הלוגיקה הוא המשפט הבא האומר, באופן גס, שהשפה אינה יכולה להבחין בין מבנים איזומורפיים.

9.39 משפט האיזומורפיזם. יהיו $\mathfrak{A}$ ו-$\mathfrak{B}$ מבנים לשפה L, יהי H איזומורפיזם מ-$\mathfrak{A}$ ל-$\mathfrak{B}$ ותהי s השמה ל-$\mathfrak{A}$. נסמן ב-$H(s)$ את ההשמה ל-$\mathfrak{B}$ הנתונה ע"י $H(s)(\mathsf{x})=H(s(\mathsf{x}))$ לכל משתנה x של L.

א. לכל שם עצם t ב-L $\quad \mathfrak{B}(t)[H(s)]=H(\mathfrak{A}(t)[s])$

ב. לכל נוסחה ϕ ב-L $\quad \mathfrak{B}(\phi)[H(s)]=\mathfrak{A}(\phi)[s]$

ובמיוחד, לכל פסוק ϕ ב-L $\quad \mathfrak{B}(\phi)=\mathfrak{A}(\phi)$

וזה אומר שבמבנים איזומורפיים אמיתיים בדיוק אותם פסוקים.

הוכחה. א. באינדוקציה על יצירת t. אם t הוא קבוע אישי c אז עלינו להוכיח $\mathsf{c}^{\mathfrak{B}}=H(\mathsf{c}^{\mathfrak{A}})$, וזה קיים לפי הגדרת האיזומורפיזם.

אם t הוא משתנה x אז עלינו להוכיח $H(s)(\mathsf{x})=H(s(\mathsf{x}))$, וזה קיים לפי הגדרת $H(s)$.

אם $t=\mathsf{G}(t_1,\ldots,t_n)$, ואז קיים

$\mathfrak{B}(t)[H(s)]=\mathfrak{B}(\mathsf{G}(t_1,\ldots,t_n))[H(s)]$

$=\mathsf{G}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}(t_1)[H(s)],\ldots,\mathfrak{B}(t_n)[H(s)])$ לפי הגדרת הערך של שם עצם

$=\mathsf{G}^{\mathfrak{B}}(H(\mathfrak{A}(t_1)[s],\ldots,H(\mathfrak{A}(t_n)[s]))$ לפי הנחת האינדוקציה

$=H(\mathsf{G}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(t_1)[s],\ldots,\mathfrak{A}(t_n)[s]))$ לפי הגדרת האיזומורפיזם

$=H(\mathfrak{A}(\mathsf{G}(t_1,\ldots,t_n))[s])=H(\mathfrak{A}(t)[s])$ לפי הגדרת הערך של שם עצם

ב. באינדוקציה על יצירת הנוסחה ϕ. עבור נוסחה אטומית ϕ ההוכחה דומה מאד להוכחת המקרה בו $t=\mathsf{G}(t_1,\ldots,t_n)$ בחלק א' של המשפט, כאשר במקום בו השתמשנו שם בהנחת האינדוקציה נשתמש עתה בתוצאת חלק א'. אם $\phi=\phi_1\square\phi_2$ אז לפי הנחת האינדוקציה המשפט נכון ל-ϕ_1 ול-ϕ_2 ולכן

$\mathfrak{B}(\phi)[H(s)]=\mathfrak{B}(\phi_1\square\phi_2)[H(s)]$

$=t_\square(\mathfrak{B}(\phi_1)[H(s)],\mathfrak{B}(\phi_2)[H(s)])$ לפי הגדרת האמת

$=t_\square(\mathfrak{A}(\phi_1)[s],\mathfrak{A}(\phi_2)[s])$ ולפי הנחת האינדוקציה

$=\mathfrak{A}(\phi_1\square\phi_2)[s]=\mathfrak{A}(\phi)[s]$ ולפי הגדרת האמת

עבור נוסחה ϕ שסימנה הראשי הוא כמת, נוכיח את המשפט רק עבור המקרה של כמת כולל, והמקרה של כמת ישי דומה לגמרי למקרה הכמת הכולל. נניח, אם כן, כי $\phi=\forall\mathsf{x}\psi$, ואז קיים

$\mathfrak{B}(\forall\mathsf{x}\psi)[H(s)]=\min_{b\in B}\mathfrak{B}(\psi)[H(s)\binom{\mathsf{x}}{b}$

מכיוון ש-H היא על B, כאשר a עובר על כל איברי A $H(a)$ עובר על כל איברי B, ולכן
$= \min_{a\in A} \mathcal{B}(\psi)[H(s)\binom{\mathsf{x}}{H(a)}$
ומכיוון ש- $H(s)\binom{\mathsf{x}}{H(a)} = H(s\binom{\mathsf{x}}{a})$ $= \min_{a\in A} \mathcal{B}(\psi)[H(s\binom{\mathsf{x}}{a})]$
לפי הנחת האינדוקציה, ש-ψ מקיימת את ב' להשמה $s\binom{\mathsf{x}}{a}$ $= \min_{a\in A} \mathcal{A}(\psi)[s\binom{\mathsf{x}}{a}]$
ולפי הגדרת האמת $= \mathcal{A}(\forall \mathsf{x}\psi)[s] = \mathcal{A}(\phi)[s]$

9.40 תת מבנה. יהיו $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ מבנים לשפה L. $\mathcal{B}$ נקרא תת מבנה של $\mathcal{A}$ אם $B\subseteq A$ וקיימים התנאים הבאים.

א. לכל קבוע אישי c של L $\mathsf{c}^{\mathcal{B}} = \mathsf{c}^{\mathcal{A}}$

ב. לכל קבוע פעולה G של L ולכל $b_1,\dots,b_n\in B$ $\mathsf{G}^{\mathcal{B}}(b_1,\dots,b_n) = \mathsf{G}^{\mathcal{A}}(b_1,\dots,b_n)$

ג. לכל קבוע יחס R של L ולכל $b_1,\dots,b_n\in B$ $\mathsf{R}^{\mathcal{B}}(b_1,\dots,b_n) = \mathsf{R}^{\mathcal{A}}(b_1,\dots,b_n)$

9.41 למה. יהי $\mathcal{A}$ מבנה לשפה L ותהי $B\subseteq A$. אז קיים תת מבנה $\mathcal{B}$ של $\mathcal{A}$ שעולמו הוא B אםם B מכילה את ערכי הקבועים האישיים ב-$\mathcal{A}$ והיא סגורה תחת הפעולות של $\mathcal{A}$, כלומר, לכל קבוע אישי של L $\mathsf{c}^{\mathcal{A}}\in B$, ולכל קבוע פעולה G של L ולכל $b_1,\dots,b_n\in B$ $\mathsf{G}^{\mathcal{A}}(b_1,\dots,b_n)\in B$.

הוכחה. בכוון האחד, אם $\mathcal{B}$ הוא תת מבנה של $\mathcal{A}$ אז, לפי הגדרת מושג תת המבנה קיים לכל קבוע אישי c של L $\mathsf{c}^{\mathcal{A}} = \mathsf{c}^{\mathcal{B}}\in B$, ולכל קבוע פעולה G של L ו- $b_1,\dots,b_n\in B$ $\mathsf{G}^{\mathcal{A}}(b_1,\dots,b_n) = \mathsf{G}^{\mathcal{B}}(b_1,\dots,b_n)\in B$.
בכוון השני, אם $B\subseteq A$ ו-B מכילה את ערכי הקבועים האישיים ב-$\mathcal{A}$ והיא סגורה תחת הפעולות של $\mathcal{A}$ אז ניתן לראות ב-9.40א'-ג' הגדרה של המבנה $\mathcal{B}$ באמצעות הגדרת $\mathsf{c}^{\mathcal{B}}$, $\mathsf{G}^{\mathcal{B}}$ ו-$\mathsf{R}^{\mathcal{B}}$, וברור שזהו תת מבנה של $\mathcal{A}$.

9.42. כאשר אנו אומרים שמבנה מתמטי אחד הוא תת מבנה של מבנה מתמטי אחר עלינו לציין בדיוק את השפה, כי יתכן שמבנה $\mathcal{A}$ הוא תת מבנה של $\mathcal{B}$ ואם נעבור למבנה $\mathcal{A}'$ עם אותו עולם בשפה רחבה יותר יתכן של-$\mathcal{A}$ אין תת מבנה שעולמו הוא B כי B של $\mathcal{B}$ אינו סגור תחת הפעולות הנוספות של $\mathcal{A}'$. למשל, לשפה שקבועיה הם 0 ו-$\dot{+}$ מבנה המספרים הטבעיים $\langle N,0,+\rangle$ הוא תת מבנה של מבנה המספרים השלמים $\langle Z,0,+\rangle$ (כמקובל במתמטיקה, סימנו כאן ב-$+$ את פעולות החיבור בטבעיים ובשלמים שהן פעולות השונות במידה מסויימת כי תחומי ההגדרה שלהן שונים). לעומת זאת למבנה $\langle Z,0,+,-\rangle$ אין תת מבנה שעולמו הוא קבוצת המספרים הטבעיים N כי קבוצת המספרים הטבעיים אינה סגורה תחת פעולת החיסור.

9.43 הגדרה. יהיו $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ מבנים לשפה L. H נקראת **שיכון** של $\mathcal{A}$ ב-$\mathcal{B}$ אם H היא פונקציה חד חד ערכית מ-A ל- B המקיימת את התנאים של האיזומורפיזם של $\mathcal{A}$ על $\mathcal{B}$ מ-9.37 פרט לכך ש-H אינה בהכרח על B.

9.44 למה. א. כל איזומורפיזם של $\mathcal{A}$ על $\mathcal{B}$ הוא שיכון של $\mathcal{A}$ ב-$\mathcal{B}$.
ב. H הוא שיכון של $\mathcal{A}$ ב-$\mathcal{B}$ אםם H הוא איזומורפיזם של $\mathcal{A}$ על תת מבנה של $\mathcal{B}$.